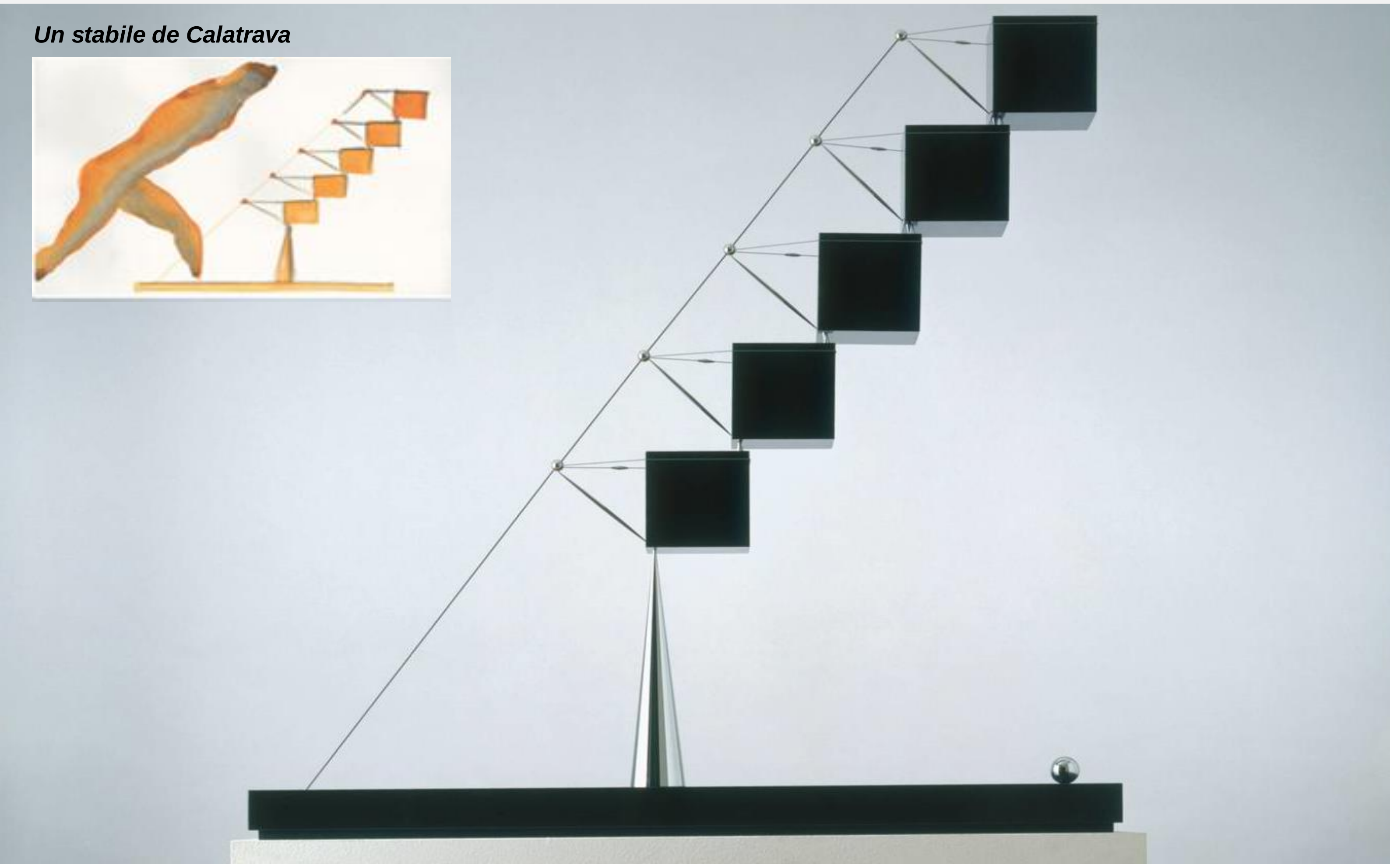
CM : STRUCTURE 1

CYCLE LICENCE S3/S4

Marc LEYRAL – Sylvain EBODE



Un stabile de Calatrava

S1-C2

LES EQUILIBRES EXTERNES

Notion d'équilibres de forces et de moments, d'action et de réaction, le Principe Fondamental de la Statique

Indice G

ECHAUFFEMENT

Chaque cours commence par un petit exercice d'échauffement, afin de rendre ludique l'usage des mathématiques et de la logique

Le verre à moitié vide ou à moitié plein ?

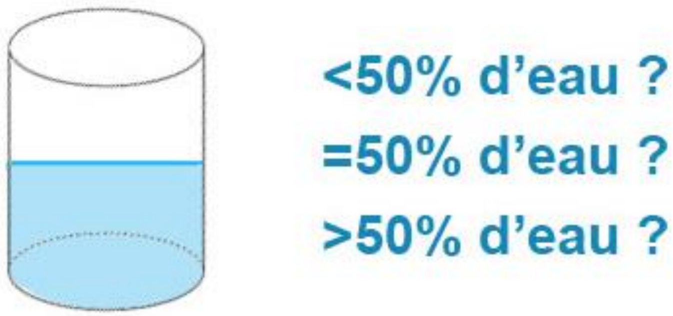
Vous avez dans les mains un verre qui est rempli à peu près à la moitié.

Parce que vous êtes un peu bizarre, vous souhaitez savoir précisément si le verre est rempli pile à la moitié, un peu plus ou un peu moins.

Vous n'avez aucun outil vous permettant de mesurer, uniquement le verre d'eau.

Comment faire ?

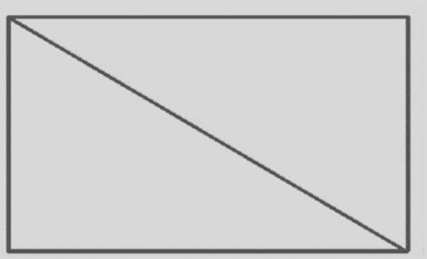
Précision : le verre est un cylindre droit.

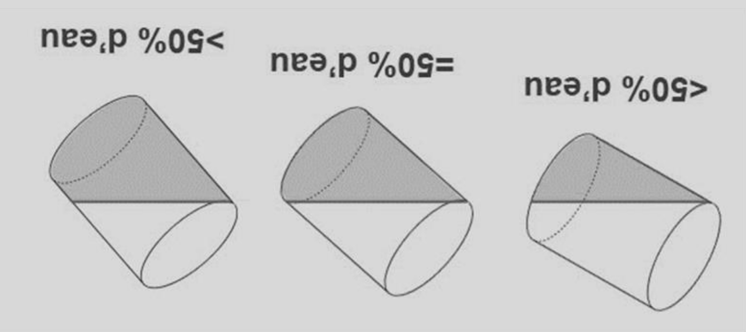


Penchez le verre de façon que l'eau soit au raz du bord supérieur. Observez ensuite le fond du verre, il y a trois possibilités :

- L'eau ne couvre pas entièrement le fond –> il y a moins de la moitié
- L'eau couvre plus que le fond –> il y a plus de la moitié
- L'eau couvre juste le fond –> le verre est à moitié plein (ou vide, comme vous voulez)

En effet, vu de côté, la diagonale d'un rectangle le coupe en deux parties égales.



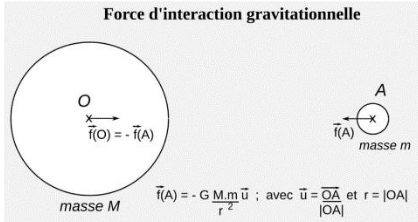


Rappel de cours : Les forces et les moments, les équilibres externes

La gravité

Découverte par Isaac Newton en 1687, *Principes Mathématiques de Philosophie Naturelle*.

Deux effets apparemment très différents (la pesanteur et le mouvement des corps célestes) sont en fait le résultat d'une seule et même cause : la gravitation universelle.
La gravité est une force proportionnelle au produit des masses et inversement proportionnelle au carré de la distance. Elle s'applique sur chacun des corps.



« Deux particules quelconques s'attirent mutuellement avec une force proportionnelle au produit de leurs masses et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare ». Newton

La Masse et le Poids

Masse :

La masse est une grandeur physique **intrinsèque** d'un corps.
Elle ne varie pas en fonction du référentiel (= planète sur laquelle on se trouve par exemple) et s'exprimer en kilogramme kg.

Poids :

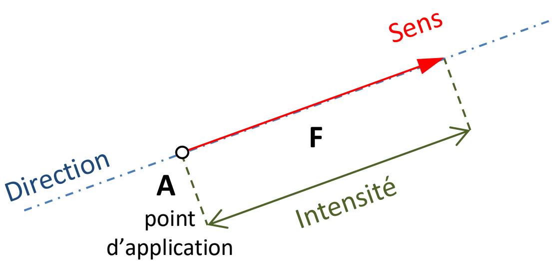
C'est la masse accélérée par le champ gravitationnel du référentiel (= la planète sur laquelle on se trouve)
Cette accélération, la gravitation se note ***g***. Sur terre, la valeur moyenne de g est g = 9,8 m.s^{-2} (souvent arrondi à 10 m.s^{-2} pour simplifier les calculs). Il s'exprime en Newton (N).

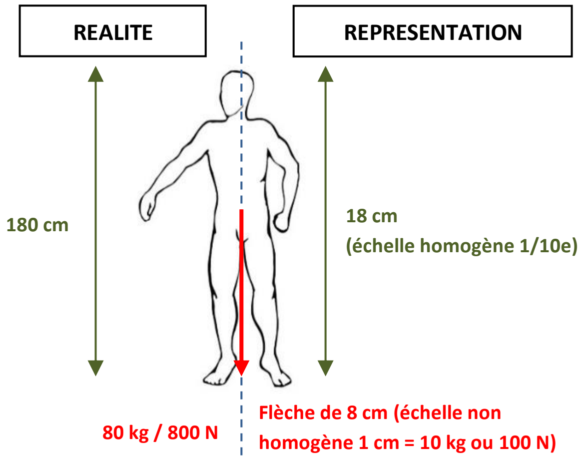
Nous sommes sur terre, il est souvent donc d'usage de parler de force en kg.
C'est abusif mais nous l'admettons car c'est plus pratique.

Notion de Force :

La force est une grandeur physique qui quantifie la capacité à **translater**. Elle provoque la **translation** (**glissement**) des structures.

Une force a une représentation vectorielle : elle part d'un **point d'application**, suit une **direction** selon un **sens** et avec une **valeur** (**intensité**) en Newton [N].





Notion de Moment :

Le moment est une grandeur physique qui quantifie la capacité à **tourner** (**rotation**). Elle provoque le **basculement** des structures. La valeur du moment est le **produit d'une force par un bras de levier** (distance séparant la force du point de calcul par projection orthogonale).

MOMENT [N.m] = FORCE [N] x DISTANCE [m]

Le bras de levier est la distance qui sépare la force du point d'étude du moment. **Il s'agit de la plus courte distance entre la droite d'application de la force et le point considéré.**

On étudie toujours le moment à partir d'un point particulier que l'on choisit (souvent un point de rotation possible, comme une rotule à un appui ou un pivot).

Sommaire du cours

1 Les lois de Newton

On a pu observer avec les exemples du levier et de la balance qu'il est possible d'équilibrer deux forces ou deux moments afin d'atteindre un équilibre.

Mais souvent les structures sont soumises à de nombreuses forces, de représentations parfois plus complexes. Il s'agit donc maintenant d'étendre ces principes d'équilibre à une théorie plus générale.

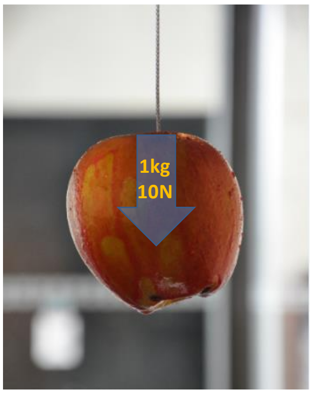
1.1 Deuxième loi de Newton

Nous commençons par la deuxième loi de Newton car c'est elle qui contient l'idée générale de ce qu'on appelle dans le domaine de la structure le **Principe Fondamental de la Statique** (qui est à connaître par cœur).

On verra que dans ce cadre, la première loi de Newton n'est qu'une application particulière de la deuxième. Ce n'est d'ailleurs pas Newton qui a énoncé le premier ce cas particulier mais Galilée.

*« Soit un corps de masse **m** (constante) : l'accélération subie par ce corps dans un référentiel galiléen est proportionnelle à la résultante des forces qu'il subit, et inversement proportionnelle à sa masse **m** »*

Ce qui s'écrit :



$$a = \frac{F}{m}$$

L'accélération subie par un corps est égal à la force qui agit sur elle divisée par sa masse.

Si plusieurs forces s'exercent sur ce corps, on parle alors de la résultante des ces forces (c'est-à-dire de la somme des vecteurs forces) :

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m}$$

Dans le domaine de l'architecture et des structure, il est quasiment toujours impératif d'avoir des structures qui ne se déplacent pas, et donc qui ont une accélération nulle.

On parle alors du domaine de la **statique**, avec une accélération nulle $a = 0$.

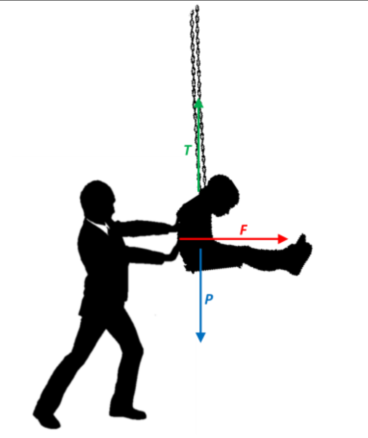
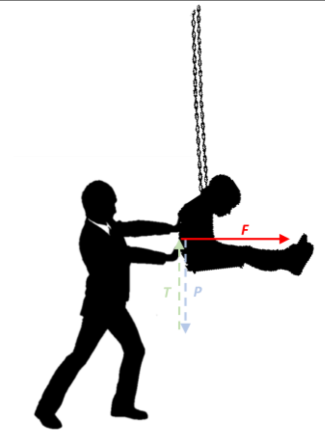
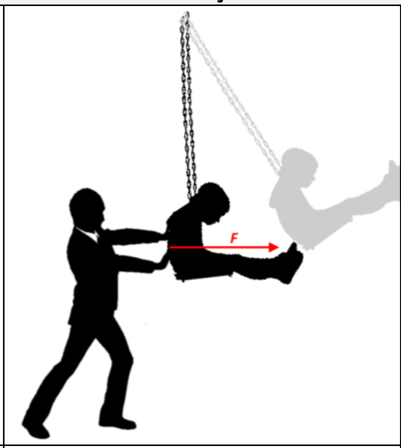
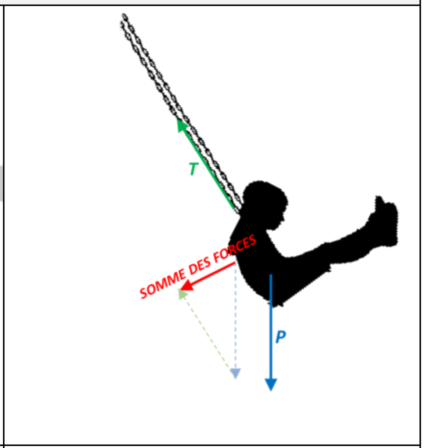
Si l'accélération est nulle alors on peut transformer la deuxième loi de Newton en :

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m} = \vec{0}$$

Ce qui conduit à dire que pour qu'un corps reste statique, il faut que la somme des forces qui s'exercent sur lui soit nulle :

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

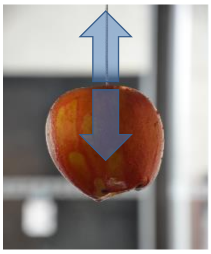
Il se trouve justement que ce résultat correspond à l'énoncé de la première loi de Newton.
La première loi de Newton est donc qu'un cas particulier de la deuxième loi, celui qui nous intéresse car il traite des corps qui ne subissent pas d'accélération.

Exemple d'un enfant sur la balançoire			
			
1 - Inventaire des forces : • *Poids de l'enfants* ***P = m.g vers le bas*** • *Tension dans la balançoire = dans cette position à une réaction égale et opposée* ***T = m.g vers le haut, dans la direction du câble*** *Nous reviendrons sur ce principe d'Action/Réaction dans les slides à venir* • *Poussée de l'adulte* ***F vers la droite***	2 - Sommes des forces : • *Le poids et la tension s'annulent.* • ***La somme des forces est égale à la poussée F de l'adulte.*** • ***On aussi peut le trouver graphiquement, en mettant les flèches bout à bout.***	3 – Ce que dit la 2ème loi de Newton : • *Le corps de l'enfant subit une accélération égale à la somme des forces qui s'exercent sur lui, divisée par sa masse :* $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ • ***L'enfant subit donc une accélération horizontale***	4 – Et après ? • *Le corps subit deux forces :* ○ *Le poids **P** vers le bas* ○ *La tension **T** dans le sens du câble* • *La somme de ces forces indique le sens de l'accélération.* • ***Cette nouvelle accélération tend à ramener l'enfant vers l'arrière.***

1.2 Première loi de Newton

« Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui, et ne le contraigne à changer d'état. »

Ce qui signifie :



- Pour qu'un solide soit en équilibre, **il faut** (attention la condition n'est pas suffisante, on en verra une autre après) donc que la somme des forces qui agissent sur ce solide soit nulle.
- L'immobilité n'étant qu'un cas de mouvement rectiligne uniforme (à vitesse nulle), cette première loi nous permet de définir la notion d'équilibre.

Dans le cadre de la **statique** (vitesse nulle), on appelle cette loi le théorème de la résultante statique :

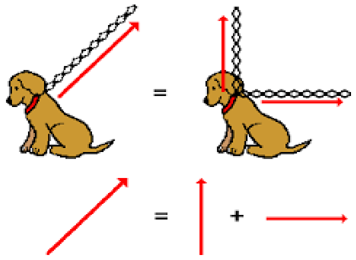
$$Corps\ en\ équilibre \quad \rightarrow \quad \sum \vec{F} = \vec{0}$$

Dans un repère orthonormé, il peut se décomposer sur X et sur Y en projetant les forces sur les axes :

Théorème de la résultante statique
$$\boldsymbol{Corps\ en\ équilibre} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \sum \boldsymbol{F_X} = \boldsymbol{0} \\ \sum \boldsymbol{F_Y} = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

Décomposer les forces

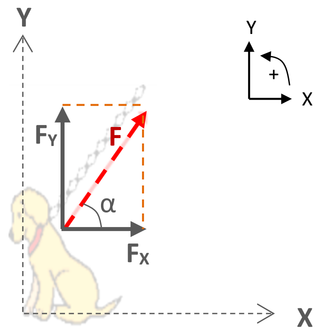
Pour appliquer ce théorème, il faut savoir décomposer les forces. En effet, les forces ne sont pas toujours verticales ou horizontales, elles sont parfois obliques.



Pour réaliser des calculs simples, il est primordial de décomposer toutes les forces en leurs **composantes horizontales et verticales**, qu'on additionnera séparément afin d'obtenir les résultantes.

On parlera de **systèmes ou de représentations équivalentes**.

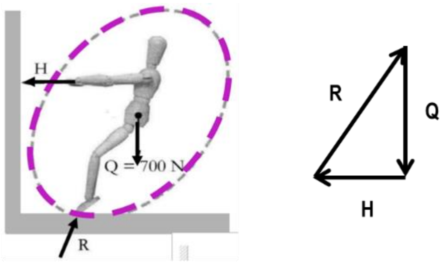
Pour décomposer les forces, il faut les projeter sur les axes orthonormés via les relations trigonométriques suivantes :



$$\begin{cases} F_X = F * \cos(\alpha) \\ F_Y = F * \sin(\alpha) \end{cases}$$

GÉNÉRALISATION

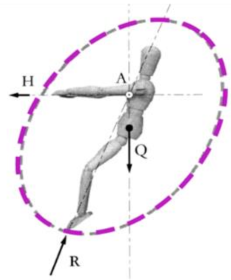
La loi de Newton se généralise dans le cas des solides indéformables.



Considérons le mannequin comme rigide.

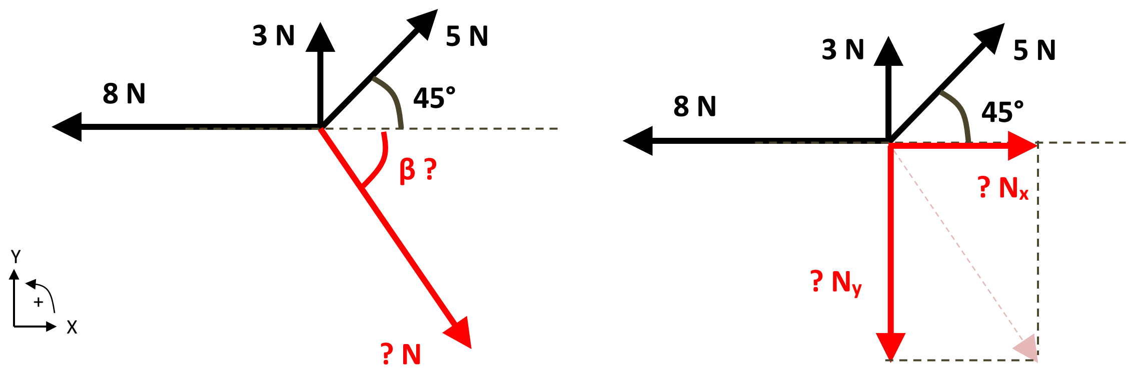
Pour qu'il soit en équilibre, il faut que:

- Le polygone des forces se referme, on dira que la somme des forces est nulle
- Les lignes d'action des trois forces doivent converger en un seul point, on dira que la somme des moments des forces est nulle.



Application 1 :

Trouver la valeur et la direction de la 4ème force permettant au nœud de rester en équilibre, de manière analytique et graphique.



Solution analytique :

Somme des forces en X = 0 :

$$-8+5\cos(45)+N_X=0$$
$$N_X=8-5\cos(45)=4{,}5\ N$$

Somme des forces en Y = 0 :

$$3+5\sin(45)-N_Y=0$$
$$N_Y=3+5\sin(45)=6{,}5\ N$$

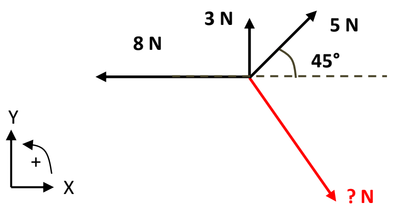
Résultante : $N_{TOT}=\sqrt{{N_X}^2+{N_Y}^2}=\sqrt{4{,}5^2+6{,}5^2}=7{,}9\ N$

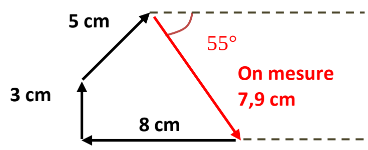
On peut aussi déterminer l'angle de la force :

$$\tan(\beta)=\frac{N_y}{N_X}=\frac{6{,}5}{4{,}5}=1{,}44\quad soit\quad \beta=\arctan(1{,}44)\approx 55°$$

Solution graphique :

- *On dessine les vecteurs avec la méthode de la représentation par échelle non homogène (1 cm = 1 N).*
- *On applique la méthode de la fermeture des vecteurs (polygone des forces).*





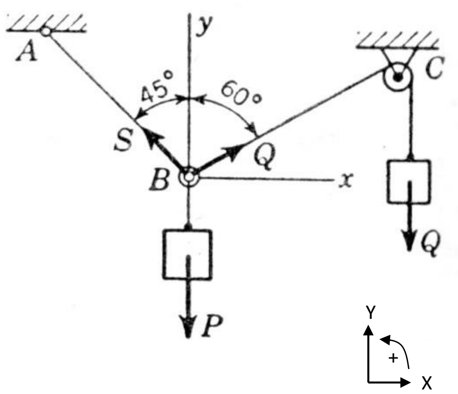
Application 2 :

Trouver la valeur de la force Q, sachant que la masse suspendue en B pèse 1,5 kg ?

On prendra *a* = *g* = 10 m.s^{-2}

Avec cet exemple, nous allons voir qu'on peut appliquer le PFS sur la structure globale en équilibre (application précédente) ou **sur toute sous-structure, elle-même en équilibre.**

Ici, le nœud B est en équilibre, puisqu'il est immobile. **Nous pouvons donc l'isoler** et appliquer le PFS sur les seules forces qui agissent sur lui



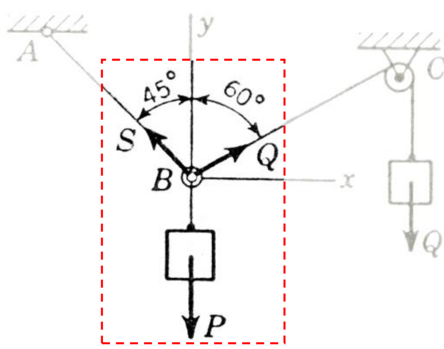
$$\begin{cases}\sum F_x=0\leftrightarrow Q.\sin(60)-S.\sin(45)=0\\ \sum F_y=0\leftrightarrow Q.\cos(60)+S.\cos(45)=P\end{cases}$$

La première équation nous donne que :

$$S=Q.\frac{\sin(60)}{\sin(45)}$$

On remplace S de la seconde équation par ce résultat :

$$Q.\cos(60)+Q.\frac{\sin(60)}{\sin(45)}.\cos(45)=P$$



Or (vous pouvez le vérifier sur votre calculatrice) : $\sin(45)=\cos(45)$

Donc :

$$\boldsymbol{Q=\frac{P}{\cos(60)+\sin(60)}=\frac{15}{\cos(60)+\sin(60)}=10{,}98\ \mathrm{N}}$$

1.3 Principe Fondamental de la Statique

La deuxième loi de Newton traite de l'**équilibre en translation** : comme les forces engendrent des translations, afin qu'une structure **ne glisse pas**, il faut que la **somme des forces qui s'exercent sur elle soit nulle**.

En statique, il nous intéresse aussi que les solides **ne basculent pas**, qu'ils ne tournent pas sur eux-mêmes.
On parle alors d'**équilibre en rotation** : comme les **moments** engendrent des rotations, afin qu'une structure **ne bascule pas**, il faut que **la somme des moments qui s'exercent sur elle en tout point soit nulle**.

Ces deux conditions constituent le **Principe Fondamental de la Statique** qu'il est **impératif de connaître par cœur**.

En résumé :

Le Principe Fondamental de la Statique – A SAVOIR PAR CŒUR

L'étude d'une structure existante part de l'hypothèse évidente qu'elle est en équilibre.
Cet équilibre suppose que (conditions nécessaires et suffisantes) :

1. **La structure ne subit pas de glissement : théorème de la résultante statique.**
   Le **glissement** est le déplacement en **translation** d'une structure.
   Ce sont les **forces** qui entraînent les translations.
   Pour qu'une structure ne glisse pas, il faut donc que **la somme des vecteurs forces qui s'exercent sur la structure soit nulle**.

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

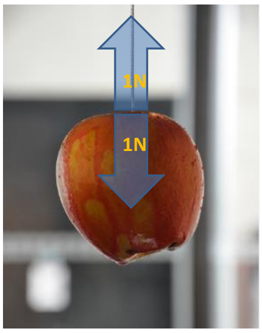
   Si on projette sur chacun des axes du repère orthonormé :

$$\begin{cases} \sum F_X = 0 \\ \sum F_Y = 0 \end{cases}$$

2. **La structure ne subisse pas de basculement : théorème du moment statique**.
   Le **basculement** est dû à une **rotation**,
   Les **moments** qui agissent sur la structure provoquent les rotations.
   Pour l'éviter, il faut donc que **la somme des moments qui s'exercent sur la structure, calculés en un même point quelconque de la structure, soit nulle.**

$$\sum M_A(\vec{F}) = 0$$

1.4 Troisième loi de Newton : Principe des actions réciproques

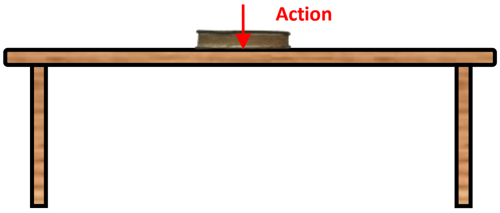


« Tout corps A exerçant une force sur un corps B subit une force d'intensité égale, de même direction mais de sens opposé, exercée par le corps B »

Ce qui signifie que si A et B sont deux corps en interaction et en équilibre, la force exercée par A sur B et la force exercée par B sur A sont directement opposées et de même valeur.

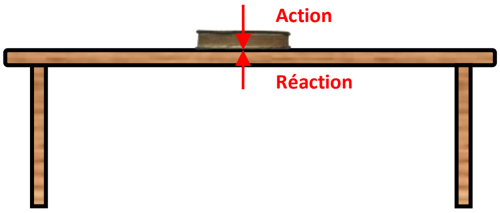
$$\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}$$

Exemple : Un livre exerce une force sur une table. Il ne tombe pas. Cela veut dire qu'il est en équilibre. Mais selon le Principe Fondamental de la Statique, s'il est en équilibre alors la somme des forces qui s'exercent sur lui est nulle.



$$\sum \vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{0}}$$

Il existe donc nécessairement une autre force qui agit sur lui qui, de plus, doit respecter deux conditions afin que la somme des deux vecteurs forces soit bien nulle :

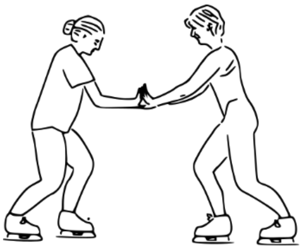


1. **Elles sont de même grandeur**
2. **Elles sont de sens opposés**

Nb. : en outre, pour que la somme des moments soit nulle :

3. **Elles sont rigoureusement alignées**

<u>Cette force, c'est la réaction de la table sur le livre (action réciproque du poids du livre sur la table).</u>



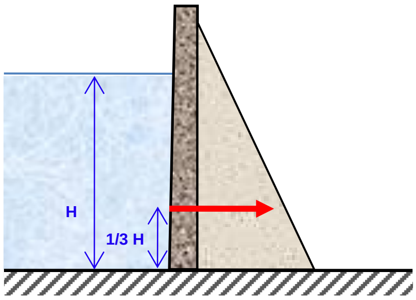
La table pousse sur le livre avec une force de sens inverse mais de même intensité que le livre pèse sur la table.
C'est exactement la même chose que quand deux patineurs se poussent l'un l'autre. S'ils ne bougent pas c'est qu'ils poussent aussi fort mais en sens inverse.
Nb : on prend des patineurs car le frottement du sol n'intervient pas dans le principe.

C'est cela que nous apprend le **principe des actions réciproques** ou Troisième Loi de Newton.

EXERCICES D'APPLICATION

Premier exercice : L'équilibre du Barrage de la Grande Dixence

Considérons un barrage poids :



1. Quels sont les deux effets pouvant déstabiliser le barrage poids ? A quoi sont-ils dus ?
2. Trouver les conditions liées à la conception du barrage pour qu'il soit en équilibre.

Solution : Les deux conditions de l'équilibre sont exprimées par le Principe Fondamental de la Statique :

N°1 : Le <u>glissement</u> – il est dû aux <u>forces</u>

Lorsqu'on l'évite, on dit qu'on respecte l'équilibre en translation
Pour le vérifier on doit s'assurer que la somme des forces projetées en X et en Y est bien nulle (théorème de la résultante statique) :

$$\sum F_X = 0 \quad et \quad \sum F_Y = 0$$

Dans le cas du barrage, une force de frottement se créé naturellement à la surface de contact entre le béton et la roche. Appelons *P* est le poids du barrage. On peut écrire de nouveau la force de frottement du barrage sur la roche sous la forme $F_f = \mu_s.P$.
μ_s est le coefficient de frottement statique et caractérise le frottement. Il ne dépend que de la nature (rugosité) des deux matériaux en contact. Plus il est élevé plus les matériaux sont rugueux et frottent.

Pour que le barrage ne glisse pas, il suffit que cette force de frottement soit supérieure ou égale à F_e, la force horizontale exercée par l'eau :

$$F_F = \mu_s.P \geq F_E \quad donc : P \geq \frac{F_E}{\mu_s}$$

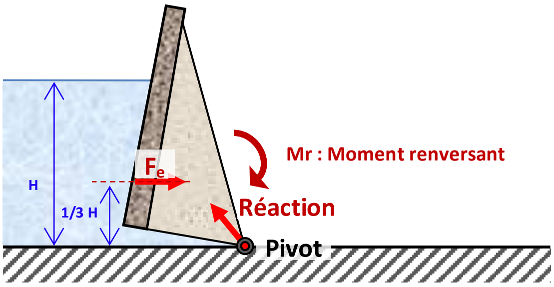
Ce qui veut dire que si le poids du barrage dépasse la force exercée par l'eau divisée par le coefficient de frottement statique μ_s, alors il ne glissera pas.

N°2 : Le <u>basculement</u> – il est dû aux <u>moments</u>

Lorsqu'on l'évite, on dit qu'on respecte l'équilibre en rotation
Pour le vérifier on doit s'assurer que la somme des moments en un point est bien nulle (théorème du moment statique) :

$$\sum \boldsymbol{M}_{/A} = \mathbf{0}$$

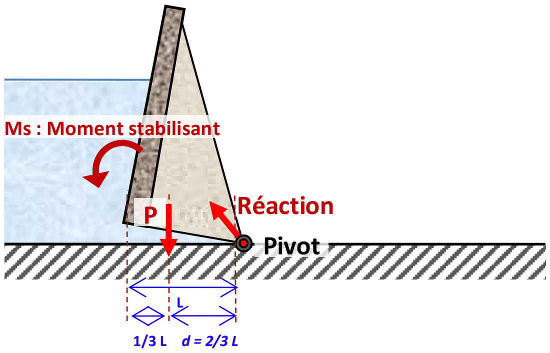
Le basculement du barrage peut également advenir. Pour le comprendre, imaginons notre barrage sur le point de basculer ! La réaction du support ne se produit plus qu'en un seul point que nous appellerons le pivot.
Ceci est bien entendu une vue de l'esprit, au moment critique avant l'effondrement.



Le décalage entre la résultante de l'action de l'eau (qui se situe à 1/3 de la hauteur d'eau ***H***) et l'horizontale passant par le pivot, c'est-à-dire la surface du sol, induit un moment renversant appelé ici $\boldsymbol{M_R}$. Il vaut :

$$M_R = F_E * \frac{1}{3} H$$

Maintenant focalisons-nous sur l'action du poids du barrage. Au moment de basculer, nous observons un couple stabilisant. Il existe en effet un décalage *d* entre le centre de gravité (qui se situe à 1/3 de la largeur ***L***) où agit l'action du poids et la réaction au niveau du pivot.



Cela provoque un moment qui invite le barrage à « tomber »… de l'autre côté que ne le pousse l'eau ! Il s'agit donc d'un moment qui le stabilise, nous l'appellerons $\boldsymbol{M_s}$.

$$M_S = P * d = P * \frac{2}{3} L$$

Pour que le barrage ne bascule pas, il faut que le moment stabilisant soit au moins égal au moment renversant :

$$M_S \geq M_R$$

C'est-à-dire :

$$P * \frac{2}{3} L \geq F_E * \frac{1}{3} H \qquad ou\ encore\ : \quad P * \frac{L}{H} \geq \frac{1}{2} * F_E$$

Pour améliorer la stabilité du barrage, il est donc possible, au choix, de :

1. Augmenter le poids **P** du barrage (après tout, il s'agit bien d'un barrage poids !).
2. Augmenter **L**, sa base de sustentation (ce qui permet d'éloigner le centre de gravité du pivot).
3. Diminuer **H**, c'est ce qu'il se passe quand le bassin d'eau est brutalement vidé en cas de danger imminent.

Application numérique : le Barrage de la Grande Dixence

Le barrage de la Grande Dixence, le plus haut d'Europe, est situé dans la vallée de Dix en Suisse. Lac de rétention contient 385 millions de m^3 d'eau. Production : 2000 MW. Sa construction s'étale de 1953 à 1961.

Données :
Hauteur : 284 m
Longueur : 748 m
Béton : 5,9 millions de m^3
Epaisseur de la base : 193 m
Le coefficient de frottement béton-roche μ_s = 0,6

On donne la résultante de la pression de l'eau :
Pression linéique à la base du barrage : *p*[kg/m] = *h*[m]x *ρ* [kg/m3] x 1ml   donc : *p* = 284*1000 = 284 000 kg/ml
La résultante vaut donc : F_e = ½*h*p = 40 328 000 kg

Condition de non glissement

$$P \geq \frac{F_e}{\mu_s} \approx 67\,000\,T$$

$$V_{béton} \geq \frac{67\,000\,T}{2{,}5\frac{T}{m^3}} \approx 26\,800\,m^3/ml$$

Condition de non basculement

$$P \geq \frac{H * F_e}{2L} \approx 29\,671\,T$$

$$V_{béton} \geq \frac{29\,671 T}{2{,}5\frac{T}{m^3}} \approx 11\,900\,m^3/ml$$

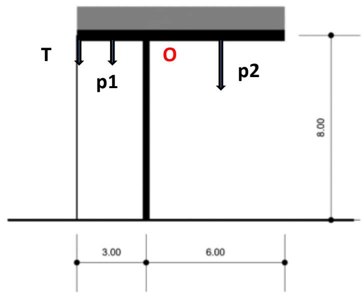
Béton par *ml* au centre du barrage réel : ½ x 284 x 193 = 27 406 m^3 : on n'est pas loin de notre résultat !

Deuxième exercice : La buvette de Prouvé / Novarina à Evian (1956) – Premier dimensionnement

Vue générale de la structure dite en béquille

Sous face en bois et potelets de façade formant tirants

Transparence sur le lac



C'est une structure de type **béquille asymétrique équilibrée par un tirant**

On veut connaître les efforts dans le câble et faire un premier dimensionnement pour qu'il ne casse pas. Au passage on aimerait connaître la réaction du sol à l'emplacement du poteau.

Hypothèses :

- La structure est soumise à une charge permanente incluant le poids propre g admis comme uniformément réparti sur la béquille ***g*** = 8 kN/ml (pondération de sécurité : 1,5) et à une charge d'exploitation ***q*** = 7 kN /ml (pondération de sécurité : 1,35)
- On donne la limite de rupture de l'acier en traction: f_t = 500N/mm^2
- Avec un coefficient de sécurité de 1,15

Equilibre :

Comment se répartissent les efforts dans le câble pour que l'ensemble soit en équilibre ?

Force de traction dans le câble par calcul des moments au point O :

p1 x 1,5 + ***T*** x 3 - ***p2*** x 3 = 0 → ***T*** x 3 = - (8 x 1,35 + 7 x 1,5) x 3 x 1,5 + (8 x 1,35 + 7 x 1,5) x 6 x 3 → ***T*** = 95,85kN

Réaction du sol en pied de poteau du poteau :

Quelle est la charge répartie de dimensionnement agissant sur la structure ?

(8 x 1,35 + 7 x 1,5 = 21,3kN/m)

Quel est l'effort de dimensionnement au sommet de la colonne ?

Effort de dimensionnement : 21,3 x 9 + 95,85 = 287,55 kN)

Dimensions du câble :

Calcul selon l'état limite ultime (non suffisant, dans notre cas c'est l'ELS qui prédomine car on veut limiter l'allongement du câble).

Quel est l'effort de dimensionnement ? (95,85kN)

Quelle est la surface minimale nécessaire du câble ? (95 850 / (500 / 1.15) = 221mm²)

Quel est le diamètre correspondant ? (16.8mm)